LYCEE PILOTE MEDENINE	Devoir de Synthèse N°2	Profs: Mme Chtéoui Faiiza M. Guetet Afif
Date: 03/03/2009	Durée: 2h	2ème Sc_{1+2+3}

20

Exercice N°1: (3 points).

Chaque question comporte trois réponses notées: a), b) et c).Une seule réponse est correcte Cocher la. (Aucune justification n'est demandée).

1. Une suite constante est :

   a) Géométrique de raison 1. b) arithmétique de raison 1 c) ni arithmétique ni géométrique.

2. Si une suite (u_n) est telle que : $u_0 \times u_2 = u_1^2$, alors (u_n) :

   a) est géométrique b) n'est pas géométrique c) n'est pas forcement géométrique.

3. Si $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$ et $\text{tg}x < 0$, alors :

   a) $x = \dfrac{\pi}{6}$ b) $x = \dfrac{2\pi}{3}$ c) $x = \dfrac{5\pi}{6}$

4. L'ensemble de solutions de l'équation $tg^2x - (\sqrt{3}+1)tgx + \sqrt{3} = 0$ dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ est :

   a) $\{\dfrac{3\pi}{4}\}$ b) $\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}\}$ c) l'ensemble vide.

Exercice N°2: (7 points).

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

AC) et

1. a) Calculer u_2 et u_3.

   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par:

   $$a_n = u_{n+1} - 2u_n \quad \text{et} \quad b_n = u_{n+1} + u_n.$$

   a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de raisons respectives (-1) et 2.

   b) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

   c) En déduire que $u_n = \dfrac{2}{3}[2^{n-1} + (-1)^n]$.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n)$.

   b) En déduire la valeur de la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_{15}$.

Exercice N°3: (6 points).

Soit l'expression : $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$, où x est un réel de l'ensemble $I = [0, \pi] \setminus \{ \frac{3\pi}{4} \}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$ et $f(\frac{\pi}{6})$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in I \setminus \{ \frac{\pi}{2} \}$, on a : $f(\pi - x) \times f(x) = 1$.

   b) En déduire $f(\frac{5\pi}{6})$.

3. a) Montrer que pour tout x de l'ensemble $I \setminus \{ \frac{\pi}{2} \}$, on a $f(x) = \dfrac{1 - tgx}{1 + tgx}$.

   b) Sachant que $f(x) = -\frac{1}{7}$, Calculer $\mathrm{tg}x$, $\cos x$ et $\sin x$.

4. Soit α un réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\cos\alpha \times \sin\alpha = \frac{2}{5}$.

   a) Montrer que $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

   b) Sachant que $\cos\alpha > \sin\alpha$, calculer $f(\alpha)$. (Utiliser la $1^{\text{ère}}$ forme de $f(x)$)

Exercice N°4: (4 points).

ABCD est un quadrilatère convexe, soit I le point d'intersection de (AC) et (BD).
On pose $\widehat{BIC} = \alpha$ et on désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. Montrer que l'aire du triangle IBC est $a = \frac{1}{2}\mathrm{IB.IC.}\sin\alpha$.

2. En exprimant de même les aires de chacun des triangles IAB, IAD et ICD, montrer que l'aire de ABCD est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathrm{AC.BD.}\sin\alpha$.

3. Application: On donne un rectangle ABCD de centre O tel que $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{6}$ et $AC = 12$.

   Montrer que $AB = 3(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ et $AD = 3(\sqrt{6} - \sqrt{3})$.